Digitale elektronica

Koen Lostrie

DIGITALE ELEKTRONICA

ACADEMIA
PRESS

Uitgeverij Academia Press
Coupure Rechts 88
9000 Gent
België

www.academiapress.be

Uitgeverij Academia Press maakt deel uit van Lannoo Uitgeverij,
de boeken- en multimediadivisie van Uitgeverij Lannoo nv.

ISBN 9789401488525
D/2022/45/387
NUR 123

Koen Lostrie
Digitale elektronica – Vijfde editie
Gent, Academia Press, 2022, 362 p.

Eerste druk, 2022

Voorwoord

Dit handboek over digitale elektronica veronderstelt zo goed als geen enkele voorkennis, behalve enkele basisbegrippen zoals cijferend rekenen uit de lagere school (zoals de staartdeling), misschien wat basis algebra (commutativiteit, associativiteit, distributiviteit), maar vooral een gezonde dosis logisch redeneervermogen. In het logische karakter van deze leerstof schuilt ook meteen het gevaar van onderschatting. Studenten ervaren dit toch als een moeilijk vak, hoewel het allemaal zeer logisch klinkt tijdens de uitleg ervan. Probeer zeker en vast zelf de schema's eens van nul te ontwerpen en leer ze zeker niet van buiten. Veel oefeningen maken is de boodschap!

In deze vijfde editie zijn er wel wat wijzigingen gebeurd. Om te beginnen is het hoofdstuk over ADC/DSP/DAC en zo goed als het volledige hoofdstuk over computerhardware weg gelaten, met uitzondering van enkele paragrafen over geheugens. Deze keuze werd gemaakt omdat het curriculum nu eenmaal sterk gewijzigd is sinds de oorspronkelijke versie van dit handboek. De pagina's die hierdoor vrij kwamen, werden enerzijds vervangen door die stukken dieper uit te werken die studenten minder goed begrepen doorheen de jaren. Anderzijds is er ook een gedeelte bij gekomen met oefeningen en hun oplossingen.

Nog een andere, werkintensieve wijziging is het gebruik van LaTeX voor deze editie terwijl alle vorige edities in Microsoft Word werden geschreven. De grote ergernissen en frustraties van een 365 pagina's lang Word document te schrijven, hebben hierbij plaats gemaakt voor de leercurve van LaTeX met zijn overdaad aan packages en eigen obstakels. Gelukkig heb ik hierbij beroep kunnen doen op de expertise van Walter Daems, mijn collega en LaTeX guru die ik niet genoeg kan bedanken voor zijn onontbeerlijke hulp bij deze gigantische klus. Het aantal mails dat ik hem verstuurd heb, had me net zo goed een contactverbod kunnen opleveren. Duizendmaal dank, Walter!

Alles is twee keer nagelezen, maar het zou me ten zeerste verbazen, moest me hier en daar toch niet een kleine type- of LaTeX-fout ontgaan zijn. Moest je er zo eentje vinden, dan mag je me dit altijd laten weten op koen.lostrie@telenet.be.

Verder wil ik zeker en vast de uitgeverij Academia Press van harte danken voor de jarenlange vlotte samenwerking.

Tot slot moest ik ook nog mijn kinderen in het voorwoord zetten: Femke, Pieter en Mathias. Ongetwijfeld zullen zij in ruil nu ook luisteren naar wat ik vraag...

Hoofdstuk 1

Logische functies

1.1 Booleaanse algebra

1.1.1 Inleiding

In wiskunde kan een variabele x oneindig veel waarden voorstellen. Afhankelijk van de verzameling waartoe hij behoort, kunnen dit gehele getallen zijn, maar ook rationele, irrationele en zelfs imaginaire getallen. In de Booleaanse algebra, opgesteld in de 19e eeuw door de Brit George Boole, kan zo'n variabele slechts twee mogelijke waarden bevatten: 0 of 1. Verderop in dit hoofdstuk zal duidelijk worden dat deze beperking van slechts twee mogelijke waarden de algebra een stuk vergemakkelijkt, zeker wat betreft de 'gevreesde' wiskundige bewijzen, maar ook voor andere eigenschappen en rekenregels.

De Booleaanse algebra kan benaderd worden met puur logische beredeneringen, zoals 'waar', 'niet waar', 'en', 'of', enz. Een 1 komt daarbij overeen met 'waar' en een 0 met 'onwaar'. Booleaanse variabelen kunnen dan logische beweringen voorstellen, zoals 'het regent', 'de zon schijnt', enz. Als bijvoorbeeld de variabele A de bewering 'het regent' voorstelt, dan zijn er twee opties: $A = 1$ als het regent en $A = 0$ als het niet regent. De combinatie van meerdere van deze variabelen vormt zo een geheel van logische beweringen (zoals bijvoorbeeld '*A of B*' of '*A en B*') waarvoor meerdere rekenregels en wetten werden opgesteld: de Booleaanse algebra. Op het eerste zicht zal dit allemaal zeer eenvoudig lijken (het is namelijk allemaal zeer logisch), maar wanneer de stof dan effectief wordt toegepast in oefeningen, blijkt het toch niet zo evident. Een klein voorbeeld:

Neem de variabele A die de bewering 'het regent' voorstelt en de variabele B voor de bewering 'de zon schijnt'. Bedenk nu even wanneer de combinatie '*A en B*' 'waar' is. De oplossing vind je in voetnoot[1] op de volgende pagina. Dit klinkt allemaal zeer eenvoudig en meestal wordt dit nog wel correct opgelost, *maar*: Wanneer is nu de combinatie '*A of B*' 'onwaar'? Deze oplossing is blijkbaar al veel minder evident[2]. De bovenstaande twee voorbeelden zullen nog meerdere keren terugkomen in dit hoofdstuk.

In de volgende paragrafen worden eerst de verschillende Booleaanse operatoren beschreven. Sommige komen wellicht bekend voor, zoals de optelling en de vermenigvuldiging, maar andere zoals de inversie en de 'exclusieve of' zijn typisch Booleaanse operatoren.

1.1.2 de Booleaanse inversie

Er wordt gesproken van het *complement* of de *inverse* van een variabele wanneer de andere waarde dan de huidige waarde van de variabele bedoeld wordt. Vermits er slechts twee mogelijke waarden zijn, wil dit dus zeggen dat wanneer variabele A gelijk is aan 1, het complement van A gelijk is aan 0. Het complement (of de inverse) van een Booleaanse variabele wordt voorgesteld door een horizontaal streepje boven de variabele zelf: $\overline{A}$. Met andere woorden, $A = 1 \Leftrightarrow \overline{A} = 0$ en $A = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = 1$. Er bestaan vele notaties om het complement aan te duiden, zoals een accent (A'), het ISO[3] 80000-2 symbool (¬A), een uitroepteken (!A) of een tilde(~A), maar in dit boek wordt enkel met de inversiestreep gewerkt omdat dit meestal voor minder haakjes zorgt en dus wat meer leesbaar is.

Als de variabele A de bewering 'het regent' bevat, dan zal $\overline{A}$ dus 1 zijn als het niet regent en 0 zijn wanneer het wel regent, namelijk het tegenovergestelde van A.

Verderop in dit boek zullen er digitale schakelingen gemaakt worden waarmee Booleaanse functies in de praktijk worden omgezet. In zo'n digitale schakeling wordt deze inversie geïmplementeerd door een NIET-poort, in het Engels ook wel *NOT gate* of *inverter* genoemd. Er bestaan twee soorten symbolen voor logische poorten, beide beschreven in de standaard ANSI[4]/IEEE[5] Std 91-1984 en zijn uitbreiding IEEE Std 91/91a-1991. Beide worden hieronder afgebeeld: de uitgesproken vorm en de rechthoekige vorm (*distinctive shape* en *rectangular shape* in het Engels). In dit boek zullen steeds de uitgesproken symbolen gebruikt worden, vermits zeer veel ontwerpsoftwarepakketten deze symbolen gebruiken.

(a) uitgesproken vorm (b) rechthoekige vorm

Figuur 1.1: symbolen voor de NIET-poort

De ingang van de NIET-poort staat links en de uitgang rechts, zoals dit zo veel mogelijk gedaan wordt in digitale schema's, ook bij alle andere logische poorten (omdat er in de westerse wereld nu eenmaal van links naar rechts gelezen wordt). De naam van de ingang is ook veranderd naar *IN* in plaats van A om duidelijk te maken dat de keuze hierin vrij is. De naam van Booleaanse variabelen (en zeker van signalen en poorten in digitale schema's) hoeft niet altijd één letter te zijn. Bij Booleaanse vergelijkingen zorgt het gebruik van één letter wel voor minder schrijf- en typewerk.

Zoals in de inleiding reeds besproken, kunnen Booleaanse variabelen slechts 2 waarden aannemen, namelijk 0 en 1. Dit heeft tot gevolg dat het perfect doenbaar is om alle mogelijkheden op te sommen waarmee deze NIET-poort kan werken. Dit wordt een 'waarheidstabel' genoemd:

[1]De bewering '*A en B*' is waar wanneer A waar is én B is waar, met andere woorden 'het regent' én 'de zon schijnt'. Dit wordt nog verder besproken in hoofdstuk 1.1.4.

[2]De bewering '*A of B*' is onwaar wanneer A onwaar is én B is onwaar, met andere woorden 'het regent niet' én 'de zon schijnt niet'. Vanaf het ogenblik dat één van beide variabelen waar is, wordt de combinatie '*A of B*' waar, dus moeten ze beiden onwaar zijn. Dit wordt nog verder besproken in hoofdstuk 1.1.3.

[3]International Organization for Standardization

[4]American National Standards Institute

[5]Institute of Electrical and Electronics Engineers

IN	UIT
0	1
1	0

Tabel 1.1: waarheidstabel van de Booleaanse inversie

Een waarheidstabel bevat voor alle mogelijke ingangswaarden de overeenkomstige uitgangswaarden van de betreffende schakeling, in dit geval een NIET-poort. De bovenstaande waarheidstabel stelt uiteraard nog niet veel voor, maar verderop zullen de schakelingen of Booleaanse functies steeds ingewikkelder worden en dan zal ook de bijhorende waarheidstabel aangroeien.

1.1.3 de Booleaanse optelling

Zoals gezegd in de inleiding, kunnen logische beweringen gecombineerd worden door middel van onder andere een OF-relatie. Beschouw bijvoorbeeld twee Booleaanse variabelen A en B. Hierbij stelt A de bewering 'het regent' voor, terwijl B de bewering 'de zon schijnt' voorstelt. Nu kan niet alleen gesproken worden over de beweringen A en B afzonderlijk, maar ook over de gecombineerde bewering A *of* B. Hiervan kan gezegd worden dat ze enkel niet waar is, wanneer zowel A als B niet waar zijn, want van het ogenblik dat één van de twee beweringen (bewering A of bewering B) waar is, wordt de bewering A *of* B ook waar. De bewering 'het regent of de zon schijnt' is met andere woorden enkel *niet waar* wanneer het *niet* regent én de zon *niet* schijnt (zoals ook besproken in de inleiding 1.1.1). Deze ingewikkelde logische tekst kan eenvoudiger voorgesteld worden met een Booleaanse formulering. Hiervoor wordt deze OF-relatie voorgesteld door de Booleaanse optelling, die hetzelfde symbool hanteert als de optelling in de 'gewone' wiskunde: het plusteken. Bovenstaande logische tekst wordt dan:

$$A + B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \; en \; B = 0 \tag{1.1}$$

In digitale schakelingen wordt deze OF-relatie voorgesteld door een logische OF-poort, in het Engels *OR gate* genoemd. Zoals besproken bij de NIET-poort wordt ook deze logische poort op twee verschillende manieren voorgesteld: met het uitgesproken symbool en het rechthoekig symbool. Beide worden hieronder afgebeeld.

(a) uitgesproken symbool (b) rechthoekig symbool

Figuur 1.2: symbolen voor de OF-poort

Wanneer ook voor deze Booleaanse optelling alle mogelijkheden opgesomd worden, ontstaat de waarheidstabel van de OF-poort. Merk op dat er hier vier mogelijke ingangscombinaties zijn in tegenstelling tot de 2 mogelijke combinaties bij de NIET-poort.

IN_1	IN_2	UIT
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabel 1.2: waarheidstabel van de Booleaanse optelling

Uit deze waarheidstabel kan afgelezen worden dat de uitgang van de OF-poort enkel 0 is in het geval dat beide ingangen 0 zijn. Als IN_1 'waar' is of IN_2 is 'waar' dan zal de logische bewering IN_1 *of* IN_2 dus ook 'waar' zijn. De OF-poort is een belangrijke bouwsteen van digitale schakelingen en zal verderop zeer veel gebruikt worden om Booleaanse functies in de praktijk om te zetten.

1.1.4 de Booleaanse vermenigvuldiging

Een andere combinatie van logische beweringen is de EN-relatie. De EN-relatie wordt in de Booleaanse algebra voorgesteld door de vermenigvuldiging en hanteert hetzelfde symbool als in de 'gewone' wiskunde: het punt. Net zoals in de 'gewone' wiskunde mag dit punt weggelaten worden.

In het verhaal van de logische beweringen (waarbij A de bewering 'het regent' bevat en B 'de zon schijnt'), kan dan gesteld worden dat de bewering A *en* B enkel 'waar' is wanneer het regent én de zon schijnt.

Gelijkaardig aan de Booleaanse optelling, kan de logische vergelijking voor de vermenigvuldiging als volgt geschreven worden:

$$A \cdot B = 1 \Leftrightarrow A = 1 \; en \; B = 1 \tag{1.2}$$

In digitale schakelingen wordt deze EN-relatie voorgesteld door een logische EN-poort, in het Engels *AND gate* genoemd. Beide symbolen voor deze logische poort staan hieronder:

(a) uitgesproken symbool **(b) rechthoekig symbool**

Figuur 1.3: symbolen voor de EN-poort

Wanneer alle mogelijkheden binnen deze Booleaanse vermenigvuldiging opgesomd worden, ontstaat de waarheidstabel van de EN-poort:

IN_1	IN_2	UIT
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabel 1.3: waarheidstabel van de Booleaanse vermenigvuldiging

Uit deze waarheidstabel kan afgelezen worden dat de uitgang van de EN-poort enkel 1 is in het geval dat beide ingangen 1 zijn. Ook de EN-poort is een belangrijke bouwsteen van digitale schakelingen en zal verderop zeer veel gebruikt worden om Booleaanse functies in de praktijk om te zetten.

1.1.5 de Booleaanse exclusieve OF

De exclusieve OF kan ook teruggevonden worden in de verzamelingenleer, waar het ook wel de *exclusieve disjunctie* genoemd wordt. In het Nederlands wordt dit afgekort tot EXOF en in het Engels *XOR*. Zoals de naam doet vermoeden, gaat het hier over een OF relatie (A of B moeten waar zijn), maar enkel exclusief: A en B mogen niet tegelijk waar zijn. In het logische voorbeeld van vorige paragrafen zou het dus niet tegelijk mogen regenen én de zon schijnen, maar wel één van beide. In formulevorm wordt hiervoor het symbool ⊕ gebruikt[6]:

$$A \oplus B = 1 \Leftrightarrow (A = 1 \text{ } en \text{ } B = 0) \text{ } of \text{ } (A = 0 \text{ } en \text{ } B = 1)$$

Hieronder staan opnieuw beide symbolen van deze logische poort in digitale schakelingen:

(a) uitgesproken symbool

(b) rechthoekig symbool

Figuur 1.4: symbolen voor de EXOF-poort

Ook in de waarheidstabel kan opgemerkt worden dat de uitgang enkel 1 wordt wanneer ofwel IN_1 ofwel IN_2 gelijk is aan 1, maar niet als ze beide 1 zijn:

IN_1	IN_2	UIT
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabel 1.4: waarheidstabel van de exclusieve OF

[6]Andere mogelijke symbolen zijn $\veebar$ en $\not\equiv$, maar die worden in dit boek niet gebruikt.

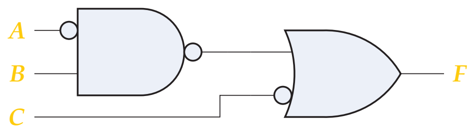
1.1.6 inversie

De cirkel op de uitgang van de NIET-poort wordt een *bubbel* genoemd en duidt op een inversie van het uitwendig signaal vergeleken met de inwendige waarde in de logische poort. Deze bubbel kan in principe op iedere in- en uitgang geplaatst worden. Dit leidt tot afgeleide logische poorten waarvan de onderstaande een voorbeeld is, namelijk een EN-poort waarvan de bovenste ingang geïnverteerd is.

(a) uitgesproken symbool **(b) rechthoekig symbool**

Figuur 1.5: symbolen voor de EN-poort met één geïnverteerde ingang

De bijhorende Booleaanse vergelijking wordt dan: $UIT = \overline{IN_1} \cdot IN_2$, dus UIT wordt enkel gelijk aan 1 als IN_1 gelijk is aan 0 én IN_2 gelijk aan 1. Dit wil ook zeggen dat de ingang IN_1 *actief laag* is (een 0 maakt de ingang actief), terwijl IN_2 en UIT *actief hoog* zijn (een 1 maakt hen actief). Dit gedrag kan veralgemeend worden naar alle logische poorten. De functie $F = \overline{\overline{A} \cdot B} + \overline{C}$ kan bijvoorbeeld geïmplementeerd worden door de volgende digitale schakeling:



Figuur 1.6: schema van $F = \overline{\overline{A} \cdot B} + \overline{C}$

Wanneer de uitgang van een OF-, EN- of EXOF-poort actief laag zijn (en dus een bubbel bevatten), dan wordt dit respectievelijk een NOF-, NEN- of EXNOF-poort genoemd (*NOR*, *NAND*, of *XNOR gate* in het Engels). Functioneel/logisch gezien zou dit exact hetzelfde opleveren als alle bubbels vervangen zouden worden door NIET-poorten, maar in praktijk is er wel degelijk een verschil. Dit zal verderop duidelijk worden in het hoofdstuk over technologie waar besproken wordt wat er nu juist *in* zo'n logische poort zit.

1.1.7 som- en producttermen

In Booleaanse algebra kunnen deze voorgaande operatoren gecombineerd worden tot meer ingewikkelde functies en schema's. Hierbij wordt er een aparte terminologie gebruikt waarvan de somterm er één is. Er wordt namelijk gesproken van een somterm wanneer er in de Booleaanse uitdrukking enkel optellingen voorkomen. Het is daarbij wel toegestaan dat individuele variabelen geïnverteerd worden. Enkele voorbeelden van somtermen zijn $A + B$, $\overline{A} + B$, $A + \overline{B} + \overline{C}$ en $\overline{A} + B + C + \overline{D}$. Let op dat er geen inversiestreep over meerdere variabelen loopt, want dan is het geen somterm meer. Zo is bijvoorbeeld $\overline{A + B}$ géén somterm want enkel individuele variabelen mogen geïnverteerd worden. Een somterm is gelijk aan 1 vanaf het ogenblik dat minstens één van de termen 1 is. Een somterm is enkel gelijk aan 0 wanneer alle termen 0 zijn, zoals reeds besproken bij de Booleaanse optelling: $A + B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \; en \; B = 0$ volgens (1.1). Voor het laatste correcte voorbeeld van hierboven zou dit in formulevorm het volgende opleveren:

$$\overline{A} + B + C + \overline{D} = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = 0 \textit{ en } B = 0 \textit{ en } C = 0 \textit{ en } \overline{D} = 0$$

Dit is zeer handig voor onder andere het invullen van waarheidstabellen. Neem bijvoorbeeld de waarheidstabel van de functie $F = \overline{A} + B + C + \overline{D}$. Deze functie heeft vier variabelen, waardoor er nu 16 mogelijkheden zijn die in de waarheidstabel moeten vermeld worden, namelijk 2^4. De NIET-poort had 1 variabele en dus 2 mogelijkheden ($= 2^1$), de OF-poort had 2 variabelen en dus 4 mogelijkheden ($= 2^2$). Dit komt uiteraard omdat een variabele slechts 2 mogelijke waarden kan aannemen en 2^n nu eenmaal het aantal combinaties is dat gemaakt kan worden met n variabelen van 2 mogelijke waarden.

De waarheidstabel van deze functie kan nu zeer eenvoudig ingevuld worden, want de functie F zal enkel gelijk zijn aan 0 wanneer $\overline{A} = 0 \textit{ en } B = 0 \textit{ en } C = 0 \textit{ en } \overline{D} = 0 \Leftrightarrow A = 1 \textit{ en } B = 0 \textit{ en } C = 0 \textit{ en } D = 1$. Deze combinatie staat op de tiende plaats in de waarheidstabel, zodat op die regel de waarde van F al ingevuld kan worden: 0. Voor alle andere combinaties van A, B, C en D zal F niet gelijk zijn aan 0 en dus 1 zijn. De waarheidstabel van deze functie F ziet er dus als volgt uit:

A	B	C	D	$F = \overline{A} + B + C + \overline{D}$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Tabel 1.5: waarheidstabel van $F = \overline{A} + B + C + \overline{D}$

In plaats van iedere mogelijke combinatie regel per regel in te vullen in het functievoorschrift om zo de waarde van F te berekenen, kan de waarheidstabel dus onmiddellijk ingevuld worden, wat heel wat tijd bespaart.

Voor producttermen geldt net hetzelfde. Er wordt namelijk gesproken van een productterm wanneer er in de Booleaanse uitdrukking enkel vermenigvuldigingen voorkomen. Het is ook hierbij wel toegestaan dat individuele variabelen geïnverteerd worden. Enkele voorbeelden van producttermen zijn $A \cdot B$, $A \cdot \overline{B}$, $A \cdot B \cdot \overline{C}$ en $\overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$, maar **niet** $\overline{A \cdot B} \cdot C$. Een productterm is gelijk aan 0 vanaf het ogenblik dat minstens één van de termen 0 is. Een productterm is enkel gelijk aan 1 wanneer alle termen 1 zijn, zoals reeds besproken bij de Booleaanse vermenigvuldiging: $A \cdot B = 1 \Leftrightarrow A = 1 \textit{ en } B = 1$

volgens (1.2). Voor het laatste voorbeeld van hierboven zou dit in formulevorm het volgende opleveren:

$$\overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} = 1 \Leftrightarrow \overline{A} = 1 \text{ en } B = 1 \text{ en } C = 1 \text{ en } \overline{D} = 1$$

Dit is zeer handig voor onder andere het invullen van waarheidstabellen. Neem bijvoorbeeld de waarheidstabel van de functie $G = \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$. Ook deze waarheidstabel kan zeer eenvoudig ingevuld worden, want de functie G zal enkel gelijk zijn aan 1 wanneer $\overline{A} = 1$ *en* $B = 1$ *en* $C = 1$ *en* $\overline{D} = 1 \Leftrightarrow A = 0$ *en* $B = 1$ *en* $C = 1$ *en* $D = 0$. Deze combinatie staat op de zevende plaats in de waarheidstabel, zodat op die regel de waarde van G al ingevuld kan worden: 1. Voor alle andere combinaties van A, B, C en D zal G niet gelijk zijn aan 1 en dus 0 zijn. De waarheidstabel van deze functie G ziet er dan als volgt uit:

A	B	C	D	$G = \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Tabel 1.6: waarheidstabel van $G = \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$

Ook hier wordt heel wat tijd bespaard door enkel de juiste productterm terug te vinden in de waarheidstabel en zo onmiddellijk alle waarden in te vullen.

Verderop in dit boek worden som- en producttermen nog gebruikt voor het vereenvoudigen van Booleaanse functies, door middel van Karnaugh diagrammen of de methode van Quine-McCluskey.